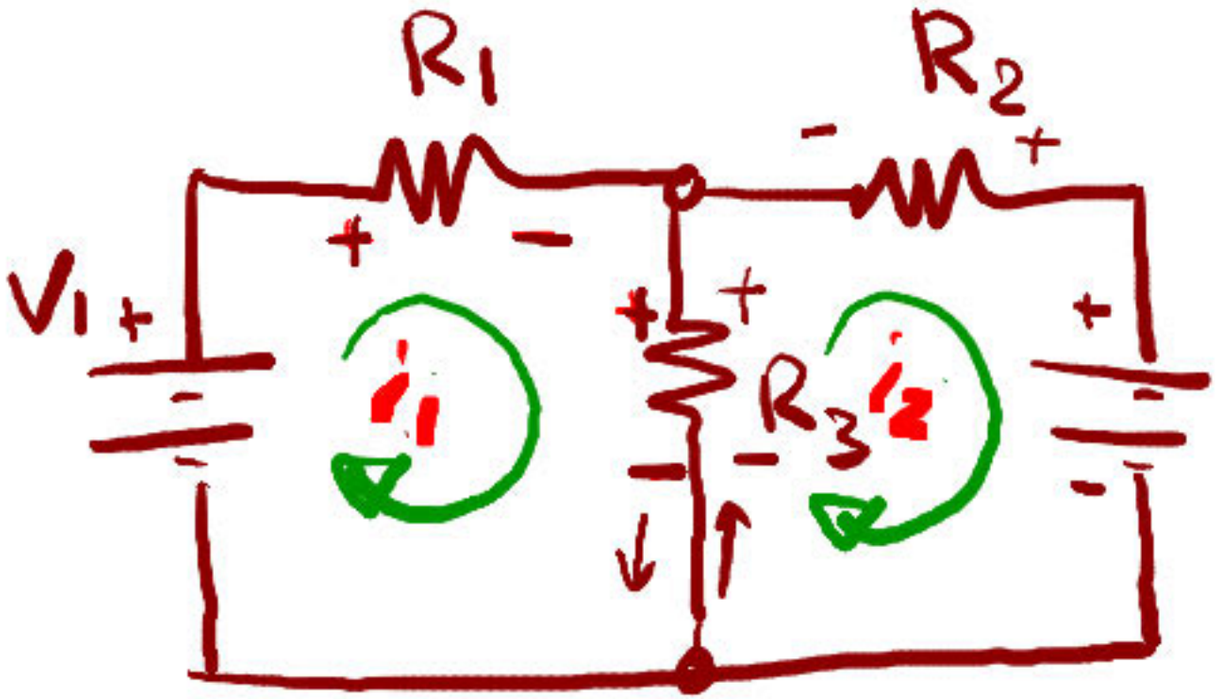
$$R i_1 + R i_2 = V$$

หน่วย 4

การวิเคราะห์แบบ Loop (ต่อ) $\Rightarrow$ KVL + Ohm's Law

$(\Sigma V = 0)$



$\Rightarrow$ KVL

Loop #1

$$-v_1 + i_1 R_1 + i_1 R_3 - i_2 R_3 = 0$$

$$i_1(R_1 + R_3) - i_2 R_3 = v_1 \quad (1)$$

Loop #2

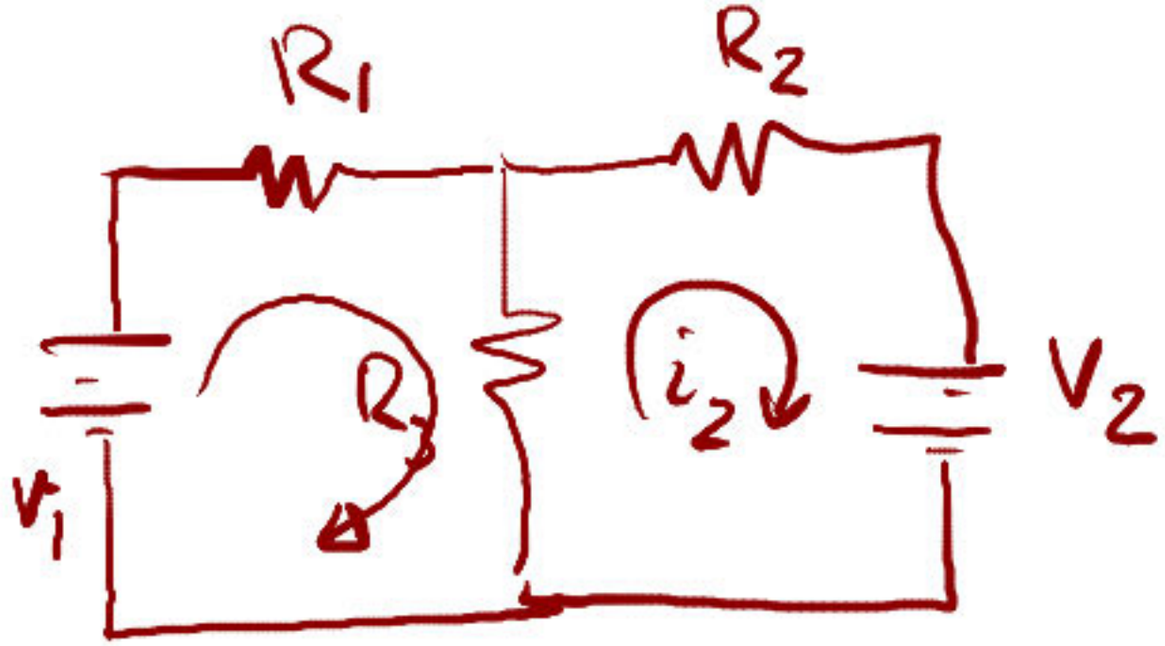
$$v_2 - i_2 R_3 - i_2 R_2 + i_1 R_3 = 0$$

$$-i_1 R_3 + i_2(R_2 + R_3) = v_2 \quad (2)$$

Ex $V_1 = 1.5\,V$, $V_2 = 2\,V$

$R_1 = 1.5\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$

จงหา i_1 และ i_2



$$v_2 - i_2 R_3 - i_2 R_2 = 0$$

$$v_2 = i_2 (R_2 + R_3) \cdots$$

$R_1 = 1.5, R_2 = 3, R_3 = 2$

$v_1 = 1.5 \quad v_2 = 2v$

- Matrix form v, i_1, i_2

من (1) $\rightarrow$ $i_1(R_1+R_3) - i_2 R_3 = v_1$

$-i_1 R_3 + i_2(R_2+R_3) = v_2$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3.5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.37 & 0.148 \\ 0.148 & 0.259 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

KVL

$$2 = 2.22 - 0.22 i_2$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 0.37 & 0.148 \\ 0.148 & 0.259 \end{bmatrix}} \times \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.37 \times 1.5 + 0.148 \times 2 \\ 0.148 \times 1.5 + 0.259 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.851 \\ 0.740 \end{bmatrix} \leftarrow$$

*

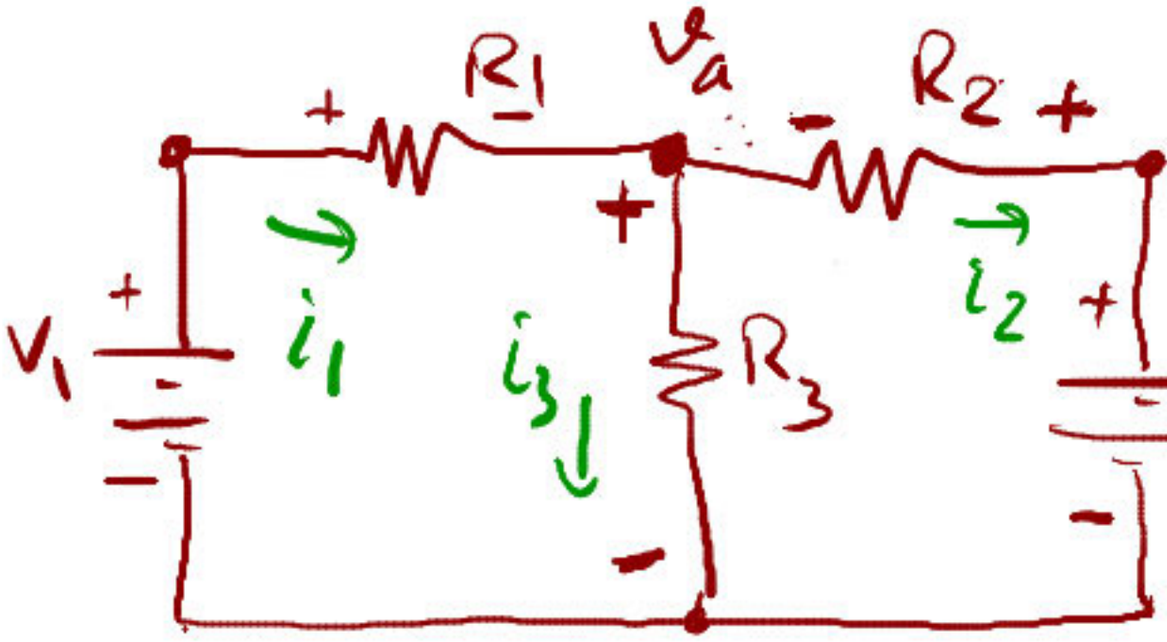
$$V_{R_1} = i_1 \times R_1 = 0.851 \times 1.5 = 1.277$$

$$i_{R_3} = 0.851 - 0.740 = 0.111\ A$$

$$\therefore V_{R_3} = i_{R_3} \times R_3 = 0.111 \times 2 = 0.222V$$

$$V_{R_2} = i_2 \times R_2 = 0.740 \times 3 = 2.22V$$

2. Node Analysis (KCL ; $\Sigma i = 0$)



$\Sigma i = 0$

Node V_a

KCL $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

on Ohm's Law.

$$\frac{v_1 - v_a}{R_1} - \frac{v_2 + v_a}{R_2} - \frac{v_a}{R_3} = 0$$

$$\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_a}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_a}{R_2} - \frac{v_a}{R_3} = 0$$

$$\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a}{R_2} + \frac{v_a}{R_3}$$

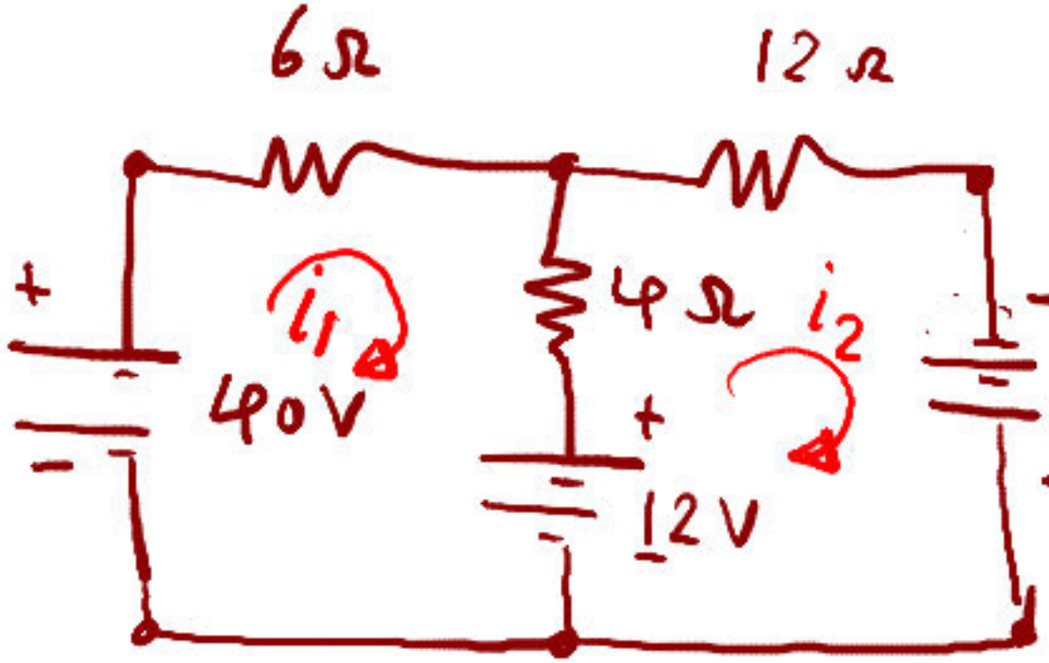
แทนค่า

$V_1 = 1.5V, V_2 = 2V$

$R_1 = 1.5\,\Omega, R_2 = 3\,\Omega, R_3 = 2\,\Omega$

$v_a = 0.222$ Volt

נתון #5 מצא את i_1 ו- i_2 בעזרת Loop Analysis



KVL Loop #1

$R \rightarrow 6\Omega + 4\Omega = 10\Omega$

$V \rightarrow 40 - 12 = 28V$

$\therefore 10i_1 - 4i_2 = 28$ -①

KVL Loop #2

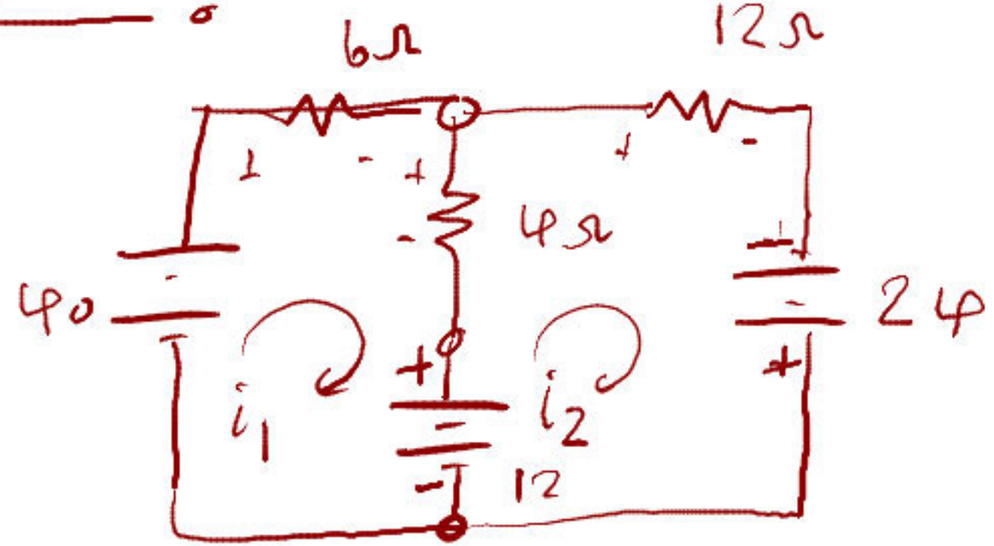
$-4i_1 + (12+4)i_2 = 24+12$

$-4i_1 + 16i_2 = 36$ -②

$i_1 = 4.11A$

$i_2 = 3.28A$

Test #5



KVL : Loop i_1 จากได้

$10i_1 - 4i_2 = 40 - 12 = 28$ —①

KVL : Loop i_2 จากได้

$-4i_1 + 16i_2 = 24 + 12 = 36$ —②

ใช้ Cramer's rule

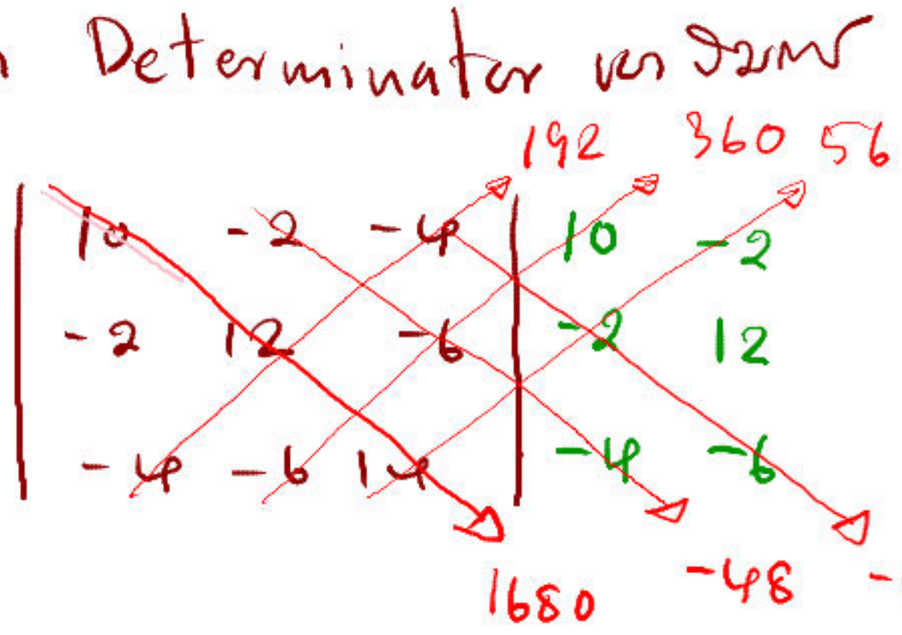
$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 28 & -4 \\ 36 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{(28)(16)-(36)(-4)}{(10\times16)-(-4)(-4)} = \frac{592}{144} = 4.111 \text{ Amp.}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 28 \\ -4 & 36 \end{vmatrix}}{144} = \frac{(10\times36)-(-4)(28)}{144} = \frac{472}{144} = 3.278 \text{ Amp}$$

Ex การแก้สมการหาค่าตัวแปร โดยใช้ Cramer's rule

$$10i_1 - 2i_2 - 4i_3 = 10$$
$$-2i_1 + 12i_2 - 6i_3 = -34$$
$$-4i_1 - 6i_2 + 14i_3 = 40$$

ขั้นตอน ① หา Determinator ของสมการ



$\Rightarrow (1680 - 48 - 48) - (192 + 360 + 56)$

$= 976$

ข้อสอบที่ 2 หาตัวแปรตัวที่ 1 ; i_1

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & -4 \\ -34 & 12 & -6 \\ 40 & -6 & 14 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1952}{976} = 2\,A$$

ข้อสอบที่ 3 หาตัวแปร i_3

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 10 \\ -2 & 12 & -34 \\ -4 & -6 & 40 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2928}{976} = 3A$$

ข้อสอบที่ 3 หาตัวแปรตัวที่ 2 ; i_2

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 & -4 \\ -2 & -34 & -6 \\ -4 & 40 & 14 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-976}{976} = -1\,A$$

วิธีการแก้สมการ หลายตัวแปร โดยใช้ Cramer's rule

Ex

$$5V_1 + 4V_2 = 31 \quad -①$$
$$-4V_1 + 8V_2 = 20 \quad -②$$

วิธีนี้ จะหาค่า V_1 และ V_2 ทำได้ดังนี้

1. นำค่าคำตอบของสมการ คือ 31 และ 20 วางลงใน แกน ที่ แล้วหารด้วย Determinator (Δ)

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 4 \\ 20 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{(31)(8)-(20)(4)}{(5)(8)-(-4)(4)} = \frac{168}{56} = 3V$$

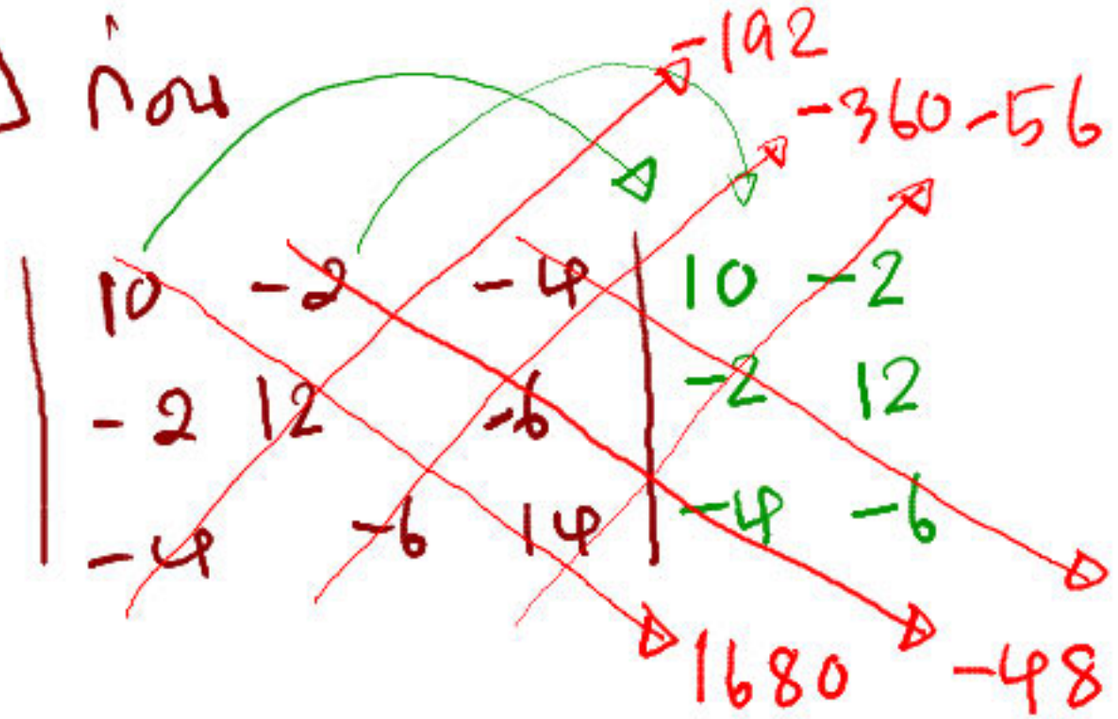
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 31 \\ -4 & 20 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(5)(20)-(-4)(31)}{56} = \frac{224}{56} = 4V$$

EX② $10i_1 - 2i_2 - 4i_3 = 10$ —①

$-2i_1 + 12i_2 - 6i_3 = -34$ —②

$-4i_1 - 6i_2 + 14i_3 = 40$ —③

1. หา Δ ก่อน



ดูแลวคงเดิม

ดูขึ้นครั้งหนึ่งเปลี่ยน

(+→-, -→+)

$\Delta = (1680 - 48 - 48) + (-192 - 360 - 56) = \underline{976}$

2. หา i_1, i_2 และ i_3

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & -4 \\ -34 & 12 & -6 \\ 40 & -6 & 14 \end{vmatrix}}{976} = \frac{1952}{976} = 2\,A$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 & -4 \\ -2 & -34 & -6 \\ -4 & 40 & 14 \end{vmatrix}}{976} = \frac{-4976}{976} = -4\,A$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 10 \\ -2 & 12 & -34 \\ -4 & -6 & 40 \end{vmatrix}}{976} = \frac{2928}{976} = 3\,A$$

Mesh (Loop) Analysis

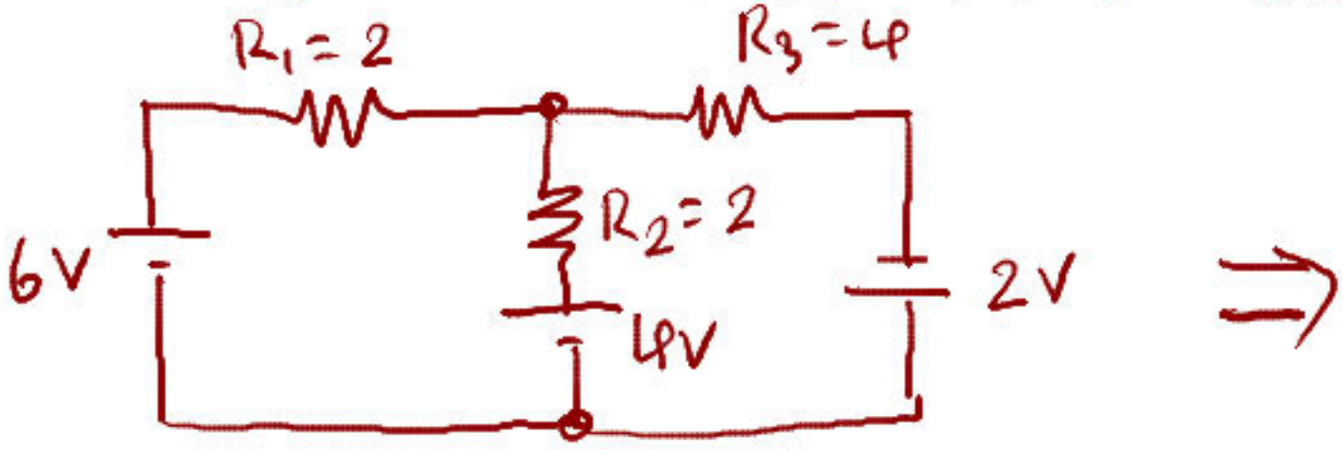
วิธีการ 1. กำหนดทิศทางการไหลของกระแสในแต่ละ Loop

2. ใช้กระแส Loop หากระแสในแต่ละตัวต้านทาน ในแต่ละ Loop โดยกำหนดเครื่องหมาย +, - ของแรงดันให้ถูกต้อง

3. ใช้ KVL เขียนสมการ Loop ในแต่ละ Loop

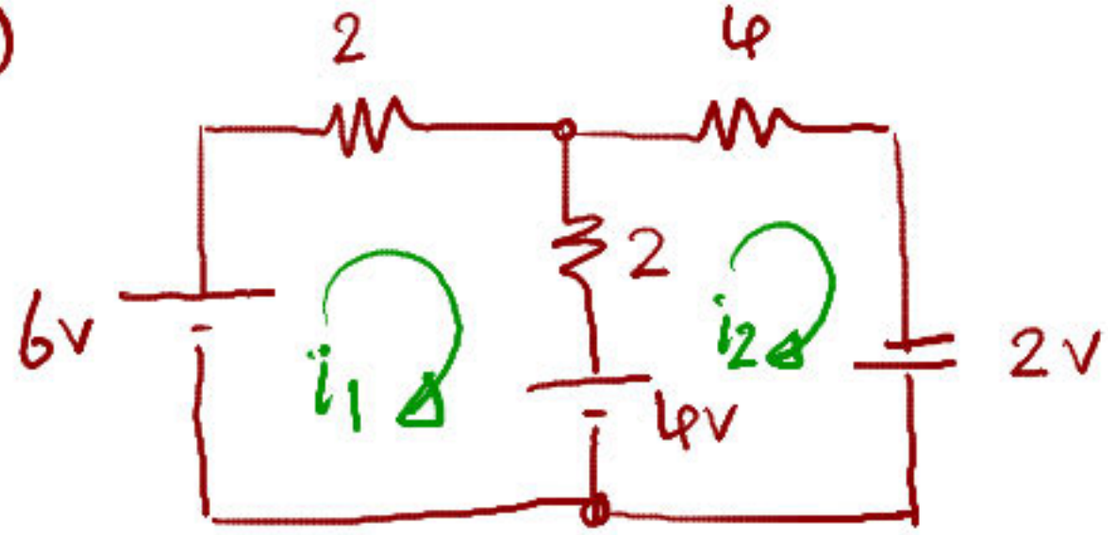
4. แก้สมการ (ลบ) ด้วย Cramer rule

EX

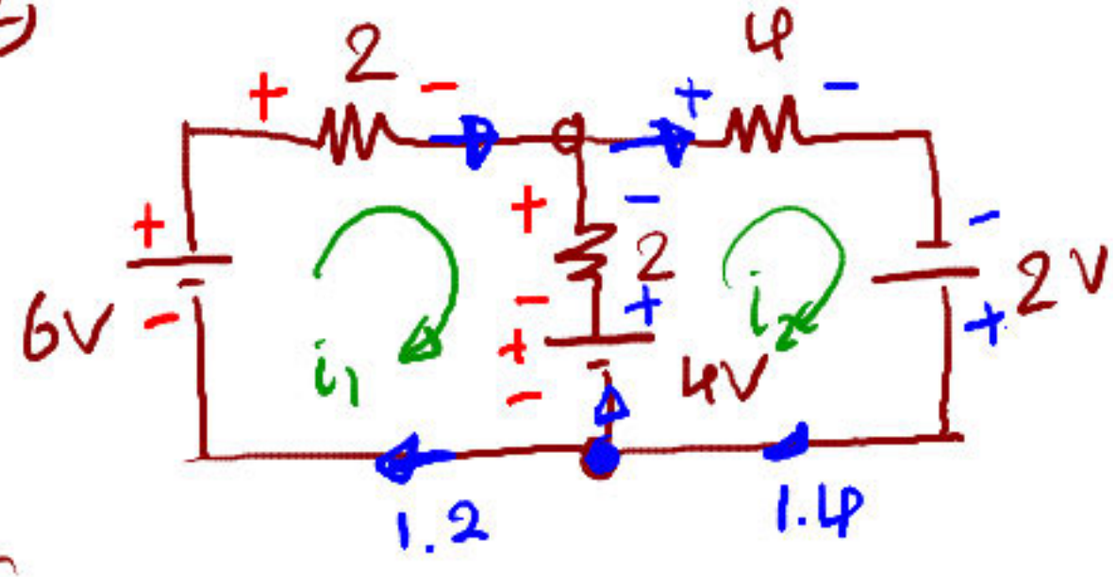


⇒

Step ①



Step ②



KVL ; Loop #2

$-4+2i_2+4i_2-2-2i_1=0$

$-2i_1+6i_2=6$ -②

Step ④ Finding By Cramer's Rule

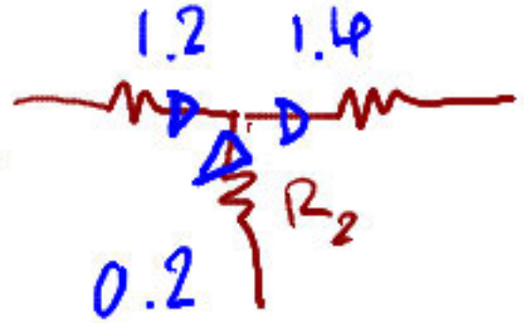
$$i_1=\frac{\begin{vmatrix}2 & -2\\ 6 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}}=\frac{12+12}{24-4}=1.2A$$

Step ③ KVL : Loop #1 : $-6+2i_1+2i_1+4-2i_2=0$

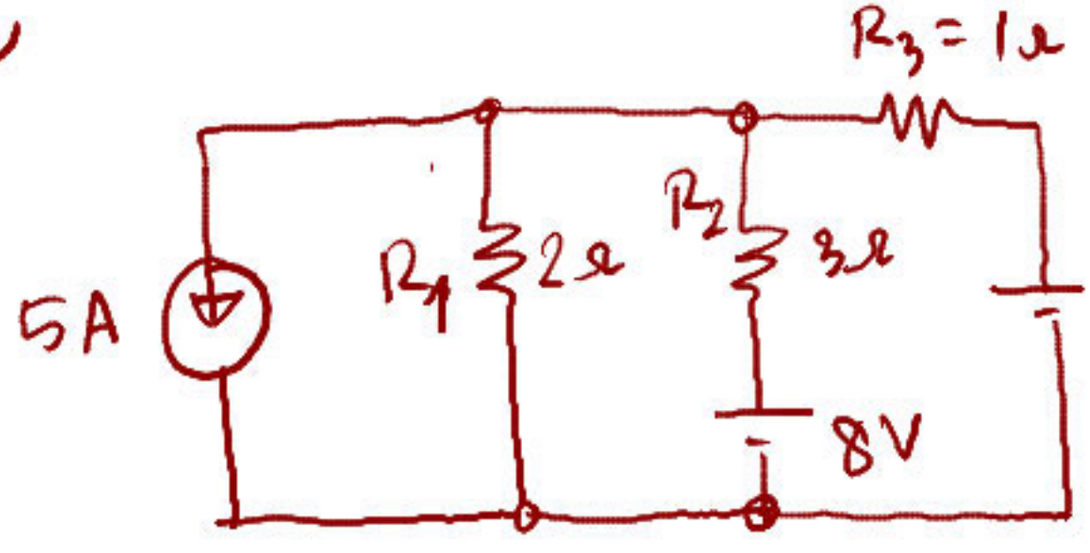
$4i_1-2i_2=2$ -①

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{20} = \frac{24+4}{20} = 1.4\ A$$

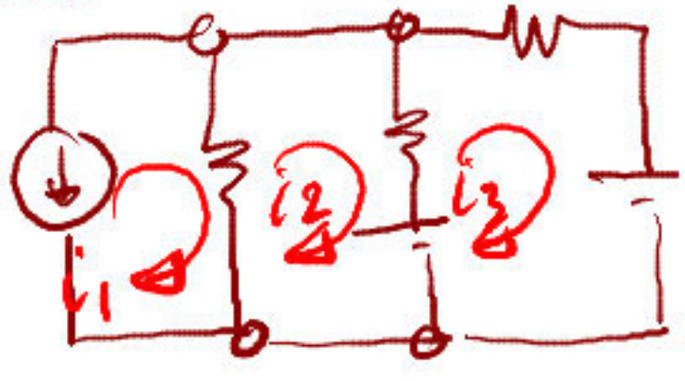
$$i_{R_2} = 1.4 - 1.2 = 0.2\ A.$$



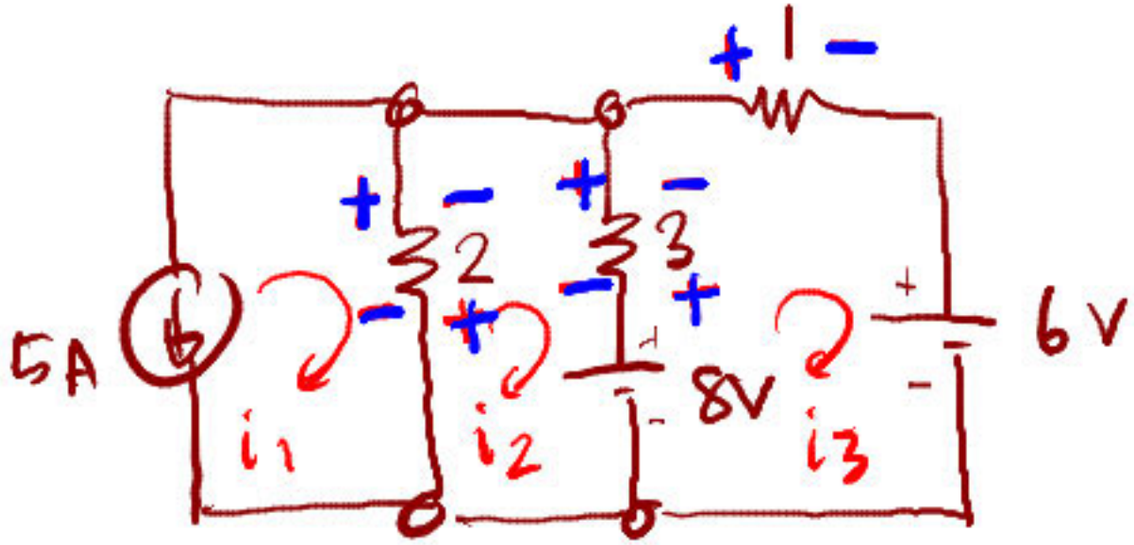
Ex ②



step ①



Step ②



Step ③ KVL : Loop #1

$i_1 = -5\,A$ — ①

KVL : Loop #2

$8 + 2i_2 + 3i_2 - 3i_3 - 2i_1 = 0$

$5i_2 - 3i_3 = -18$ — ②

KVL : Loop #3

$6 - 8 + 3i_3 + 1i_3 - 3i_2 = 0$

$-3i_2 + 4i_3 = 2$ — ③

step ④ แก้สมการหา i_2, i_3

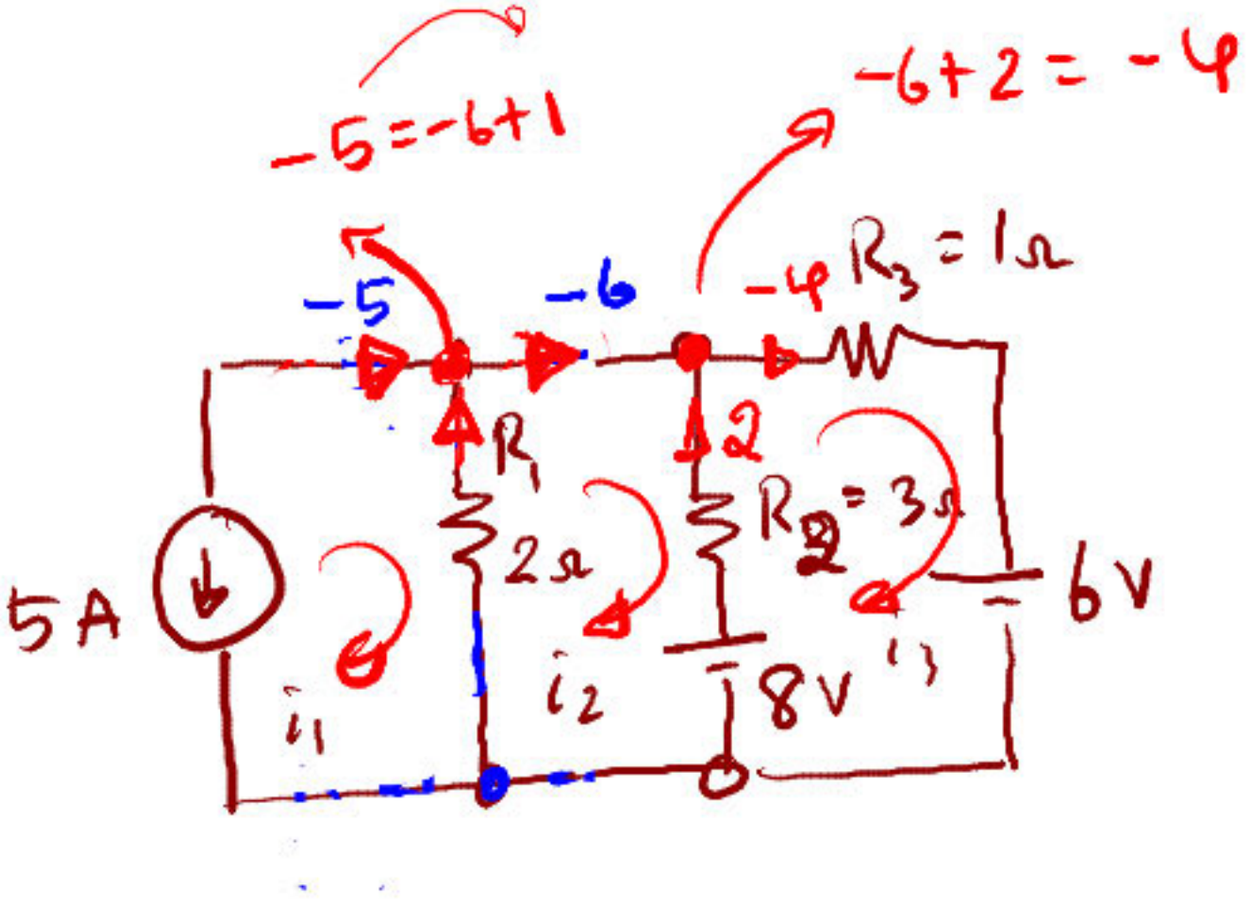
$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} -18 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{66}{11} = -6A$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -18 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{11} = -\frac{44}{11} = -4A$$

$i_{R_1} = ?$ หาม ?

$i_{R_2} = ?$ หาม ?

$i_{R_3} = ?$ หาม ?



$i_{R_1} = i_1 - i_2 = -5A - (-6A) = 1A \downarrow$

$i_{R_2} = i_3 - i_2 = -4A - (-6A) = 2A \uparrow$

$i_{R_3} = -i_3 = 4A$ (ทวนเข็ม)

Node Analysis

อธิบาย 1. กำหนดจุดอ้างอิง (Reference) หรือ ground ของวงจร

2. ถ้ามี Voltage Source ให้เปลี่ยนเป็น Current Source แล้วเปลี่ยนวงจรใหม่ (Source Transformation)

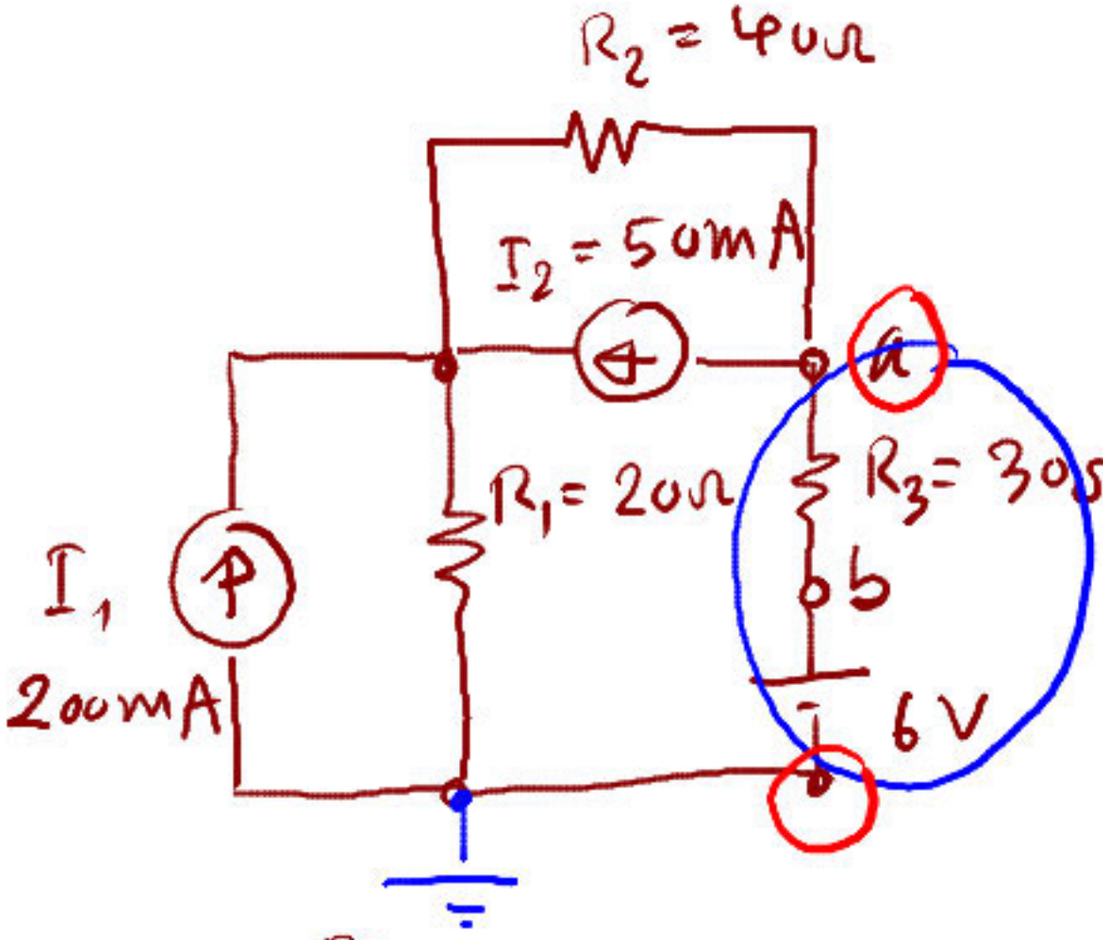
3. กำหนดโนด (Voltage ; V_a, V_b, V_c ...)

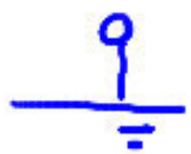
4. กำหนดทิศทางของกระแสในแต่ละกิ่ง (branch)

5. เขียนสมการโนดโดยใช้ KCL → (ได้โนด)

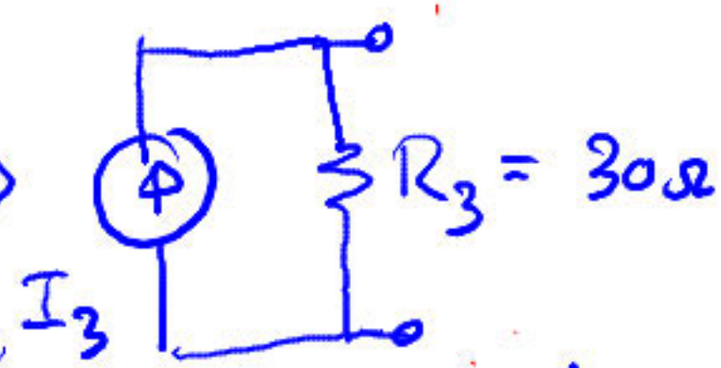
6. แก้สมการโดยใช้ Cramer rule

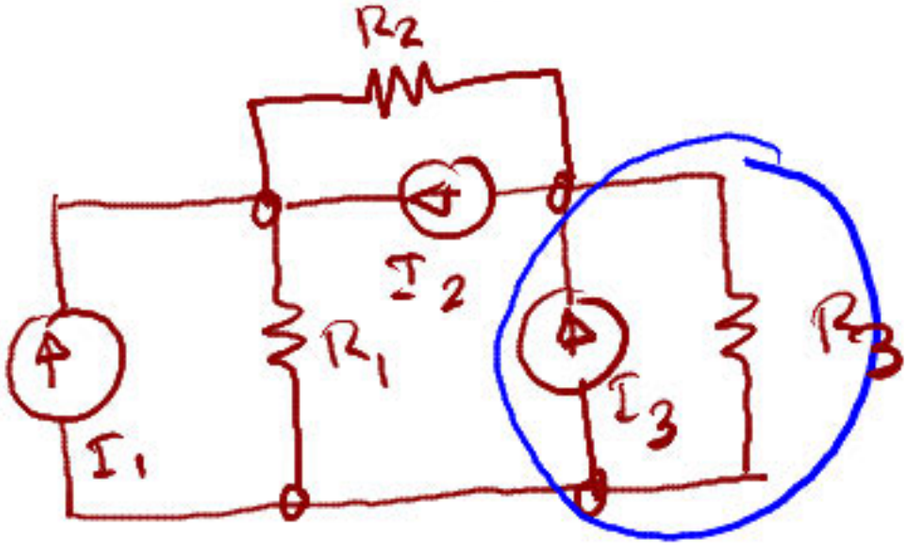
Ex 3 จงหา V_{ab} โดยการวิเคราะห์แบบโนด



step① 

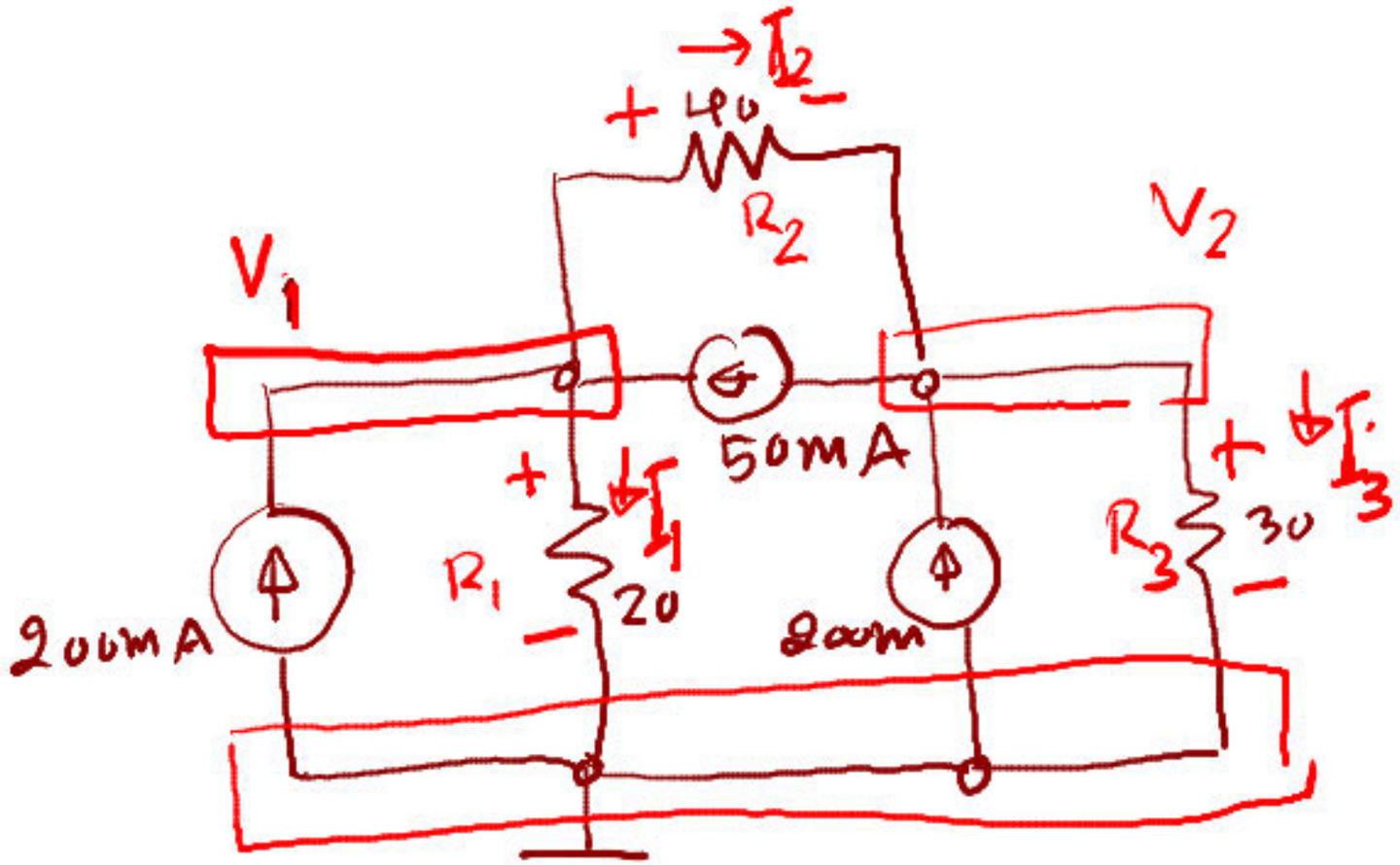
step② แปลง V → I





step③ เขียนวงจรใหม่

step④ คำนวณโนด/หาค่า
ของกระแส



Step ⑤ KCL ที่โนด V_1 ได้ดังนี้

$(\Sigma i = 0,\ i_{เข้า} = i_{ออก})$

Node V_1.

→ $200mA + 50mA = I_1 + I_2$

$\boxed{\frac{1}{R} = G}$ $\Rightarrow \frac{1}{20} = 0.05$, $\frac{1}{40} = 0.025$

→ $250mA = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2}$

$250mA = \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{40}$

$\frac{V_1}{20} + \frac{V_1}{40} - \frac{V_2}{40} = 250\,mA$

$(0.075S)V_1 - (0.025S)V_2 = 0.25$ — ①

Node V_2 กฎ = ออก

$$200mA + I_2 = 50mA + I_3$$

$$200mA + \frac{V_1 - V_2}{40\Omega} = 50mA + \frac{V_2}{30\Omega}$$

$$-\frac{V_1}{40} + \frac{V_2}{40} + \frac{V_2}{30} = 150\ mA$$

$$-(0.025)V_1 + (0.025+0.0333)V_2 = 150mA$$

$$-(0.025)V_1 + (0.0583)V_2 = 150mA \quad -(2)$$

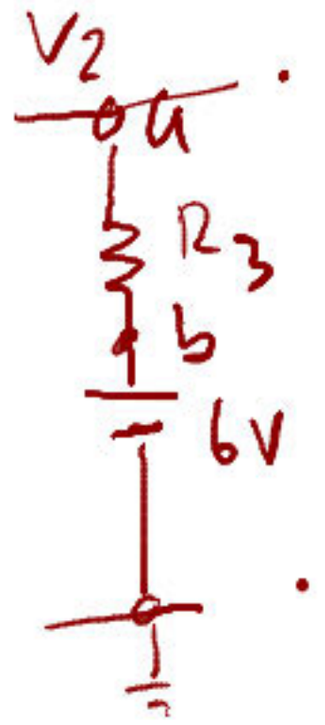
Step (6) แก้สมการโดยใช้ Cramer rule หา V_1, V_2

$$(0.075\,S)V_1 - (0.025\,S)V_2 = 250\,mA$$

$$-(0.025\,S)V_1 + (0.058\,3)V_2 = 150\,mA$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0.25 & -0.025 \\ 0.15 & 0.058 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.075 & -0.025 \\ -0.025 & 0.058 \end{vmatrix}} = \frac{0.0183}{0.00375} = 4.89\,V.$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.075 & 0.25 \\ -0.025 & 0.15 \end{vmatrix}}{0.00375} = \frac{0.0175}{0.00375} = 4.67\,V$$



$V_2 = 4.67$

$V_a = V_2 = V_{ab} + 6V$

$\therefore V_{ab} = V_2 - 6V$

$= -1.33V$

Test #6 Find V_1, V_2