

# สัปดาห์ที่ 1

การวิเคราะห์สัญญาณไซน์ที่สภาวะคงตัว

## Sinusoidal Steady-State Analysis

(Part I)

1

### จุดประสงค์การเรียนรู้

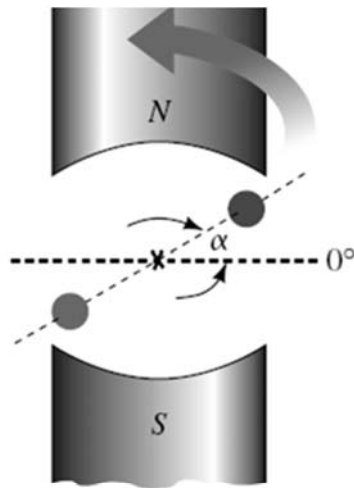
- ☐ สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของสัญญาณไซน์ได้
- ☐ นำทฤษฎีของตัวแปรเชิงซ้อนมาประยุกต์ใช้กับวงจรไฟฟ้า  
หาค่าของอิมพีแดนซ์และแอดมิตแตนซ์ได้
- ☐ นำกฎของโอห์ม กฎของเคอร์ชอฟฟ์วิเคราะห์วงจร  
โดยใช้เฟสเซอร์ได้

2

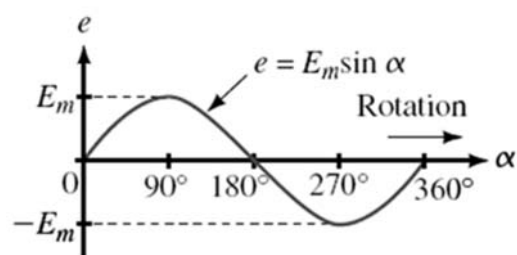
## เนื้อหา

- ☐ สัญญาณไซน์
- ☐ จำนวนเชิงซ้อน
- ☐ เฟสเซอร์
- ☐ แอดมิตแตนซ์และอิมพีแดนซ์

3

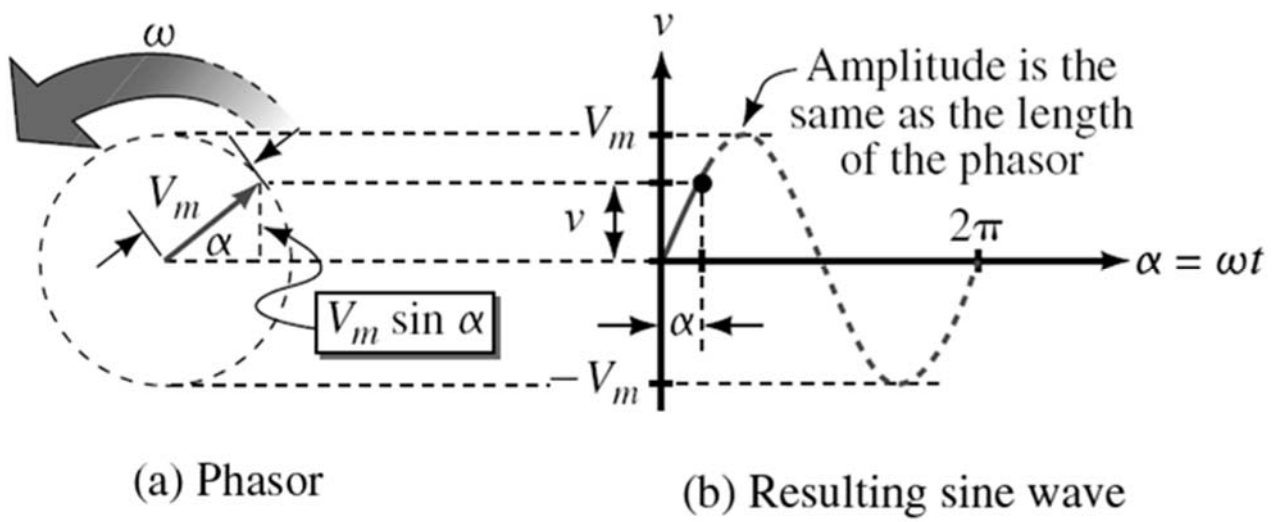


(a) End view showing coil position



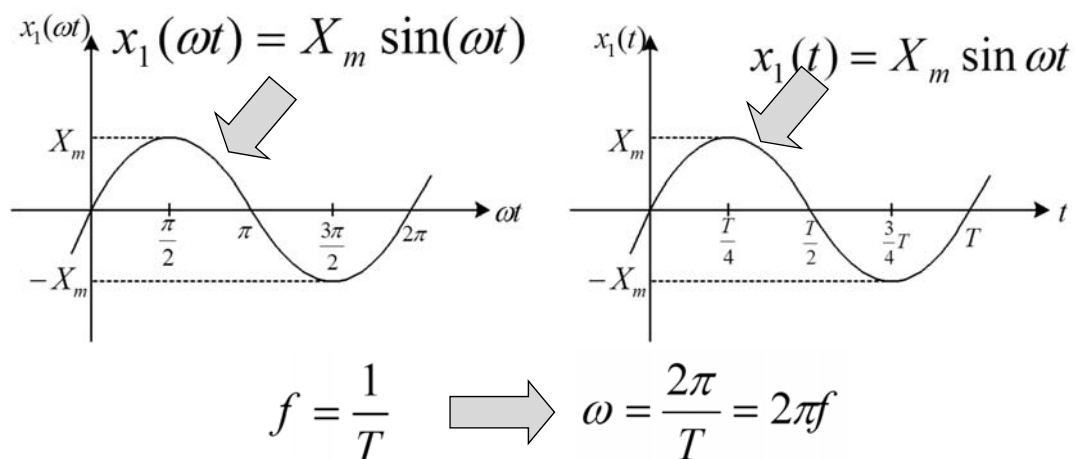
(b) Voltage waveform

4

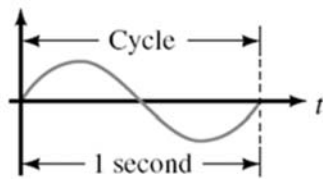


5

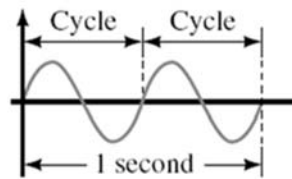
## สัญญาณไซน์ (Sinusoids)



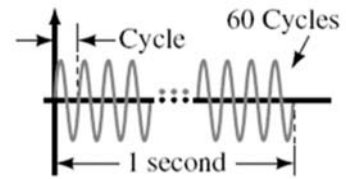
6



(a) 1 cycle per second = 1 Hz

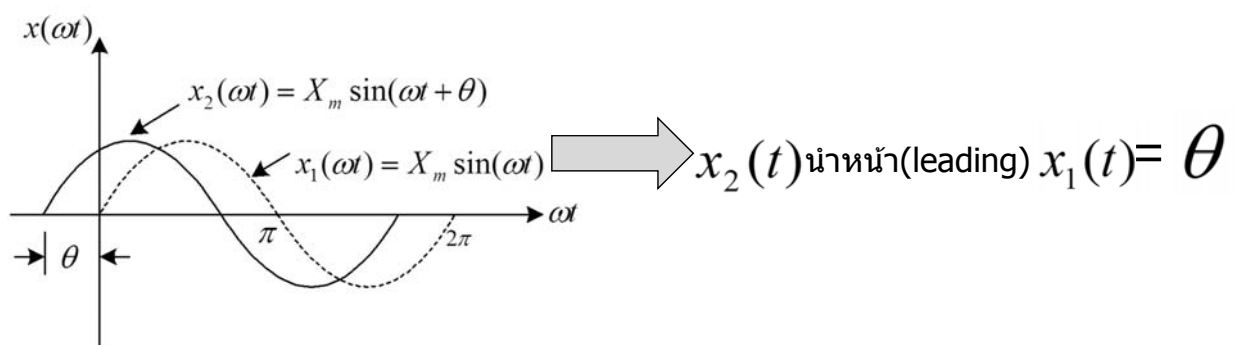


(b) 2 cycles per second = 2 Hz



(c) 60 cycles per second = 60 Hz

7

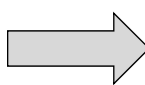


$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t + \theta)$$

$$x_2(t) = X_2 \sin(\omega t + \alpha)$$

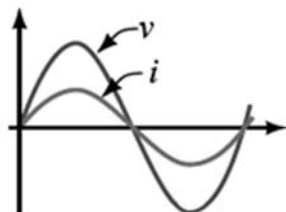
เมื่อ  $\theta > \alpha$

$$x_2(t) \text{ นำหน้า } x_1(t) = \theta - \alpha$$

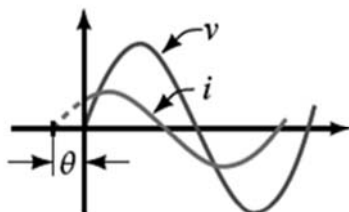


$$x_1(t) \text{ ตามหลัง (lagging) } x_2(t) = \theta - \alpha$$

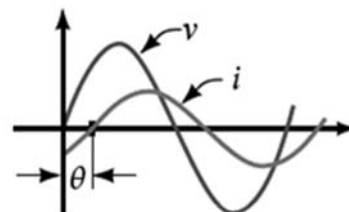
8



(a) In phase



(b) Current leads



(c) Current lags

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้แรงดัน

$$v_1(t) = 10 \cos(377t + 60^\circ) \text{ V และแรงดัน}$$

$$v_2(t) = -4 \sin(377t + 25^\circ) \text{ V}$$

(ก) จงหาขนาดของแรงดัน

(ข) จงหาความถี่ในหน่วยของเฮิรตซ์ (Hz)

(ค) จงหาความสัมพันธ์ของมุมเฟสของแรงดันว่าเกิดการนำหน้าหรือตามหลังเป็นเท่าไร

วิธีทำ

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{377}{2 \times 3.14} = 60 \text{ Hz}$$

$$\text{ขนาดของแรงดัน } v_1(t) = 10 \text{ V}$$

$$\text{ขนาดของแรงดัน } v_2(t) = 4 \text{ V}$$

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin \omega t$$

$$v_2(t) = -4 \sin(377t + 25^\circ)$$

$$v_2(t) = 4 \sin(377t + 25^\circ + 180^\circ)$$

$$v_2(t) = 4 \cos(377t + 115^\circ)$$

$$v_1(t) = 10 \cos(377t + 60^\circ)$$

} เปรียบเทียบกัน

$$v_2(t) \text{ นำหน้า } v_1(t) = 115^\circ - 60^\circ = 55^\circ$$

$$v_1(t) \text{ ตามหลัง } v_2(t) = 115^\circ - 60^\circ = 55^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้แรงดัน

$$v(t) = 10\sin(10t + 60^\circ) \text{ V}$$

กระแส  $i(t) = 5\sin(10t - 90^\circ) \text{ A}$

(ก) จงหาคาบเวลา

(ข) ขนาดของแรงดัน และขนาดของกระแส

(ค) จงหาความสัมพันธ์ของมุมเฟสของสองสัญญาณนี้  
ว่าเกิดการนำหน้าหรือตามหลังเป็นเท่าไร

วิธีทำ  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.14}{10} = 0.628 \text{ s} = 628 \text{ ms}$

ขนาดของแรงดัน = 10 V

ขนาดของกระแส = 5 A

แรงดันนำหน้ากระสอย  $60^\circ - (-90^\circ) = 150^\circ$

กระแสตามหลังแรงดันอยู่  $150^\circ$

11

ตัวอย่างที่ 3 จงแปลงฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันโคไซน์

(ก)  $v(t) = 8\cos 5t + 6\sin 5t \text{ V}$

(ข)  $i(t) = 10\sin 10t - 4\cos 10t \text{ A}$

วิธีทำ

(ก)  $v(t) = \sqrt{8^2 + 6^2} \cos(5t - \tan^{-1}(\frac{6}{8}))$   
 $= 10\cos(5t - 36.86^\circ)$

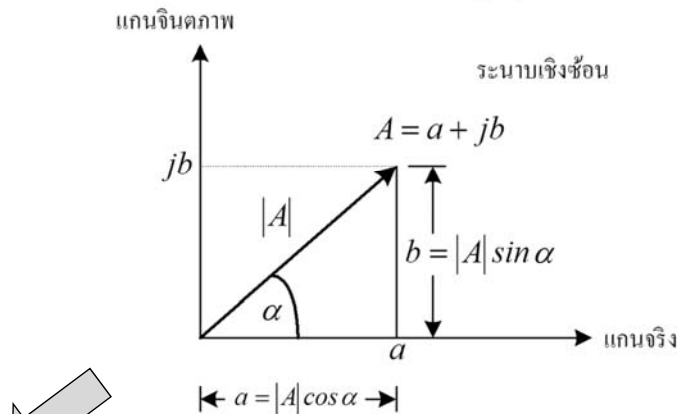
(ข)  $i(t) = \sqrt{(-4)^2 + (10)^2} \cos(10t - (180^\circ - \tan^{-1}(\frac{10}{-4})))$   
 $= \sqrt{116} \cos(10t - (180^\circ + 68.20^\circ))$   
 $= 10.77 \cos(10t + 111.8^\circ)$

12

## จำนวนเชิงซ้อน (complex numbers)

□ พิกัดฉาก (rectangular form)  $A = a + jb$

□ พิกัดเชิงขั้ว (polar form)  $A = |A| \angle \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$



$$A = a + jb = |A| \cos \alpha + j|A| \sin \alpha = |A|(\cos \alpha + j \sin \alpha) = |A|e^{j\alpha} = |A| \angle \alpha$$

13

## คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้  $A_1 = a_1 + jb_1$  และ  $A_2 = a_2 + jb_2$

□ การบวกและลบจะใช้พิกัดฉาก  $A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) \pm j(b_1 \pm b_2)$

□ การคูณจะใช้พิกัดเชิงขั้ว  $A_1 A_2 = |A_1| |A_2| \angle (\alpha_1 + \alpha_2)$

□ การหาร ใช้พิกัดเชิงขั้ว  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1|}{|A_2|} \angle (\alpha_1 - \alpha_2)$

**ตัวอย่างที่ 4** จงเปลี่ยนตัวแปรเชิงซ้อนในพิกัดฉากให้เป็นพิกัดเชิงขั้ว  
พร้อมทั้งวาดกราฟความสัมพันธ์ของพิกัดทั้งสองบนระนาบเชิงซ้อน

(ก)  $1 + j1$     (ข)  $-1 + j1$     (ค)  $-1 - j1$     (ง)  $1 - j1$

**วิธีทำ**

(ก)  $Z = 1 + j1 = \sqrt{1^2 + 1^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \sqrt{2} \angle 45^\circ$

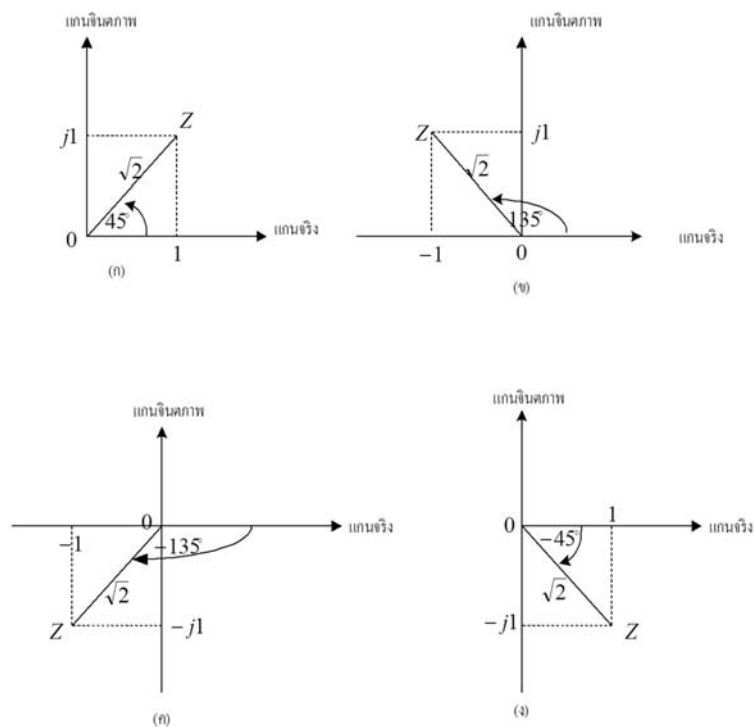
(ข)  $Z = -1 + j1 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \sqrt{2} \angle 180^\circ - 45^\circ = \sqrt{2} \angle 135^\circ$

(ค)  $Z = -1 - j1 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \sqrt{2} \angle 180^\circ + 45^\circ = \sqrt{2} \angle 225^\circ$

(ง)  $Z = 1 - j1 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = \sqrt{2} \angle -45^\circ$

15

**กราฟความสัมพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อนบนระนาบเชิงซ้อนตัวอย่างที่ 4**



16

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้  $Z_1 = 3 + j4$ ,  $Z_2 = 1 + j1$

(ก) จงหา  $Z_1 Z_2$

(ข) จงหา  $Z_1 + Z_2$

วิธีทำ

(ก)  $Z_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} \angle \tan^{-1}(\frac{4}{3})$ ,  $Z_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \angle \tan^{-1}(\frac{1}{1})$

$$Z_1 Z_2 = 5 \times \sqrt{2} \angle (53.1^\circ + 45^\circ) \\ = 7.07 \angle 98.13^\circ$$

(ข)  $Z_1 + Z_2 = 3 + j4 + 1 + j1$   
 $= 4 + j5$

17

### เฟสเซอร์ (Phasor)

□ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ประกอบด้วยขนาดและมุมเฟสในโดเมนความถี่

□ ใช้เขียนแทนสัญญาณในโดเมนเวลา

การเขียนเฟสเซอร์แทนสัญญาณไซน์

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \longleftrightarrow V = V_m \angle \theta$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแปลงฟังก์ชันไซน์ที่แปรตามเวลาให้เป็นเฟสเซอร์

(ก)  $v(t) = 3 \cos(2t + 50^\circ)$  (ข)  $i(t) = \sin(t - 30^\circ)$

วิธีทำ (ก)  $V = 3 \angle 50^\circ$  (ข)  $I = 1 \angle -30^\circ - 90^\circ = 1 \angle -120^\circ$

ตัวอย่างที่ 7 จงแปลงเฟสเซอร์ต่อไปนี้ให้เป็นฟังก์ชันในโดเมนเวลาที่ความถี่

$$f = 2 \text{ kHz}$$

(ก)  $V = 19 \angle 60^\circ$  (ข)  $I = 4 \angle 120^\circ$

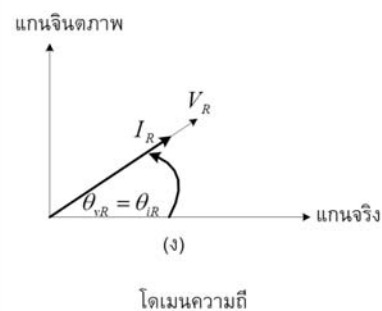
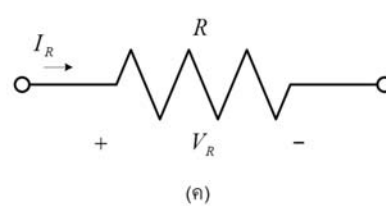
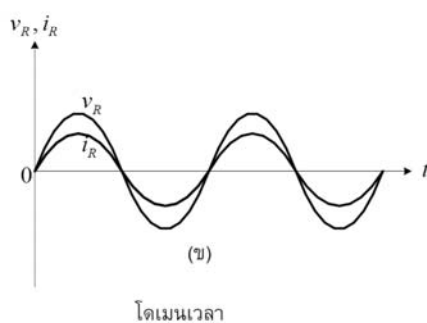
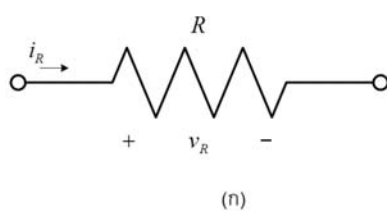
วิธีทำ (ก)  $v(t) = 19 \cos(4\pi kt + 60^\circ)$  (ข)  $i(t) = 4 \cos(4\pi kt + 120^\circ)$  18

## สมการความสัมพันธ์ของอุปกรณ์แบบพาสซีฟ

| อุปกรณ์      | สมการในโดเมนเวลา                | สมการในโดเมนความถี่                                                                          |
|--------------|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| ตัวต้านทาน   | $v_R(t) = Ri_R(t)$              | $V_R = RI_R$<br>$V_m \angle \theta_{vR} = RI_m \angle \theta_{iR}$                           |
| ตัวเหนี่ยวนำ | $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ | $V_L = j\omega LI_L$<br>$V_m \angle \theta_{vL} = \omega LI_m \angle \theta_{iL} + 90^\circ$ |
| ตัวเก็บประจุ | $i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$    | $I_C = j\omega CV_C$<br>$I_m \angle \theta_{iC} = \omega CV_m \angle \theta_{vC} + 90^\circ$ |

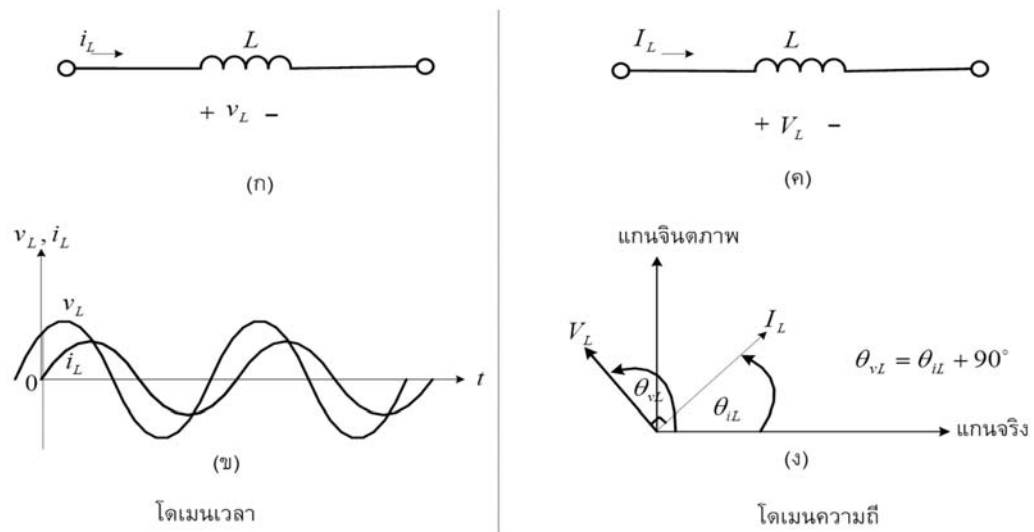
19

กราฟความสัมพันธ์ของแรงดันและกระแสของตัวต้านทานในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่



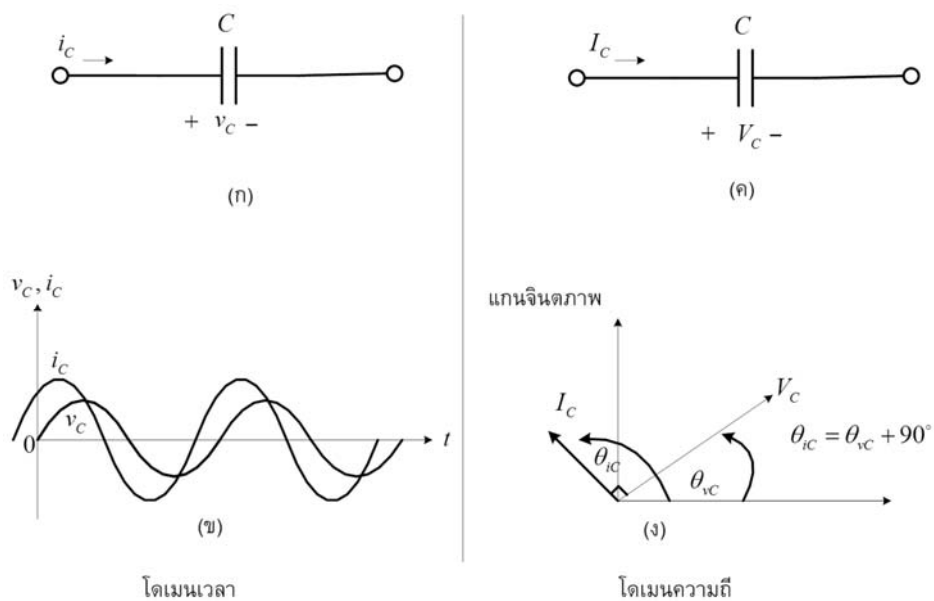
20

กราฟความสัมพันธ์ของแรงดันและกระแสของตัวเหนี่ยวนำในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่



21

กราฟความสัมพันธ์ของแรงดันและกระแสของเก็บประจุในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่



22

ตัวอย่างที่ 8 กระแสเฟสเซอร์

$10\angle 80^\circ$  mA ที่ไหลผ่านตัวต้านทาน  $3\text{ k}\Omega$

จงหาแรงดันตกคร่อมตัวต้านทานแปรตามเวลากำหนดให้ความถี่เป็น 50 Hz

วิธีทำ

$$V = (3\text{ k})(10\angle 80^\circ \text{ mA}) = 30\angle 80^\circ$$

ความถี่เชิงมุม  $\omega = 2\pi(50) = 100\pi \text{ rad/s}$

แรงดันที่แปรตามเวลา

$$v(t) = 30 \cos(100\pi t + 80^\circ)$$

23

ตัวอย่างที่ 9 ตัวเหนี่ยวนำ  $L = 0.05 \text{ H}$  กระแสเฟสเซอร์

$$I = 4\angle 30^\circ \text{ A}$$

กำหนดให้ความถี่ 60 Hz

จงหาแรงดันที่ตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำในโดเมนเวลา

วิธีทำ แรงดันเฟสเซอร์


$$\begin{aligned} V &= j\omega LI \\ &= j(2 \times \pi \times 60)(0.05)(4\angle 30^\circ) \\ &= (2 \times \pi \times 60)(0.05)\angle 90^\circ (4\angle 30^\circ) \\ &= 75.4\angle 120^\circ \end{aligned}$$

แรงดันแปรตามเวลา


$$v(t) = 75.4 \cos(377t + 120^\circ) \text{ V}$$

24

ตัวอย่างที่ 10 ตัวเก็บประจุ  $C = 150 \mu\text{F}$  กระแสเฟสเซอร์  $I = 3.6 \angle -145^\circ \text{ A}$

กำหนดให้ความถี่เป็น 60 Hz

จงหาแรงดันเฟสเซอร์ที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุในโดเมนความถี่

วิธีทำ

$$I = j\omega CV$$

$$3.6 \angle -145^\circ = j(2\pi \times 60)(150 \times 10^{-6})V$$

แรงดันเฟสเซอร์  $\Rightarrow V = \frac{3.6 \angle -145^\circ}{(2\pi \times 60)(150 \times 10^{-6}) \angle 90^\circ}$   
 $= 63.67 \angle -235^\circ$

25

## อิมพีแดนซ์ (Impedance)

อิมพีแดนซ์ คืออัตราส่วนของแรงดันเฟสเซอร์ต่อกระแสเฟสเซอร์มีหน่วยเป็นโอห์ม  $\Omega$

ระนาบเชิงซ้อน

$Z = R + jX$

$X = Z_m \sin \theta_z$

$R = Z_m \cos \theta_z$

แกนจริง

$$Z = \frac{V}{I} \Rightarrow Z = \frac{V_m \angle \theta_v}{I_m \angle \theta_i}$$

$$= \frac{V_m}{I_m} \angle \theta_v - \theta_i$$

$$= Z_m \angle \theta_v - \theta_i$$

$$= Z_m \angle \theta_z$$

▪ พิกัดฉาก

▪ พิกัดเชิงขั้ว

Resistance

↓

Reactance

$Z = R + jX$

$Z = Z_m \angle \theta_z$

$$Z_m = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta_z = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$Z = Z_m \cos \theta_z + jZ_m \sin \theta_z = R + jX$

26

ความสัมพันธ์ของแรงดันเฟสเซอร์กระแสเฟสเซอร์และอิมพีแดนซ์ของอุปกรณ์แบบพาสซีฟ

| อุปกรณ์พาสซีฟ | สมการความสัมพันธ์             | อิมพีแดนซ์                                                                                                  |
|---------------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ตัวต้านทาน    | $V_R = RI_R$                  | $Z = R$                                                                                                     |
| ตัวเหนี่ยวนำ  | $V_L = j\omega LI_L$          | $Z = j\omega L = jX_L = \omega L \angle 90^\circ$                                                           |
| ตัวเก็บประจุ  | $V_C = \frac{I_C}{j\omega C}$ | $Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\left(\frac{1}{\omega C}\right) = -jX_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$ |

$$\begin{array}{l}
 R \Rightarrow \text{Resistance ของตัวต้านทาน} \\
 X_L \Rightarrow \text{Reactance ของตัวเหนี่ยวนำ} \\
 X_C \Rightarrow \text{Reactance ของตัวเก็บประจุ}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} R \\ X_L \\ X_C \end{array}} \right\} \text{หน่วย } \Omega$$

27

## แอดมิตแตนซ์ (Admittance)

แอดมิตแตนซ์ คือส่วนกลับของอิมพีแดนซ์หน่วยเป็นโมห์หรือซีเมนส์ (Siemens:S)

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = G + jB \leftarrow \begin{array}{l} \text{susceptance หน่วย S} \\ \text{(conductance) หน่วย S} \end{array}$$

| อุปกรณ์พาสซีฟ | สมการความสัมพันธ์             | แอดมิตแตนซ์                                                                       |
|---------------|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| ตัวต้านทาน    | $I_R = \frac{1}{R} = GV_R$    | $G = \frac{1}{R}$                                                                 |
| ตัวเหนี่ยวนำ  | $I_L = \frac{V_L}{j\omega L}$ | $Y = \frac{I_L}{V_L} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} \angle -90^\circ$ |
| ตัวเก็บประจุ  | $I_C = j\omega CV_C$          | $Y = \frac{I_C}{V_C} = j\omega C = \omega C \angle 90^\circ$                      |

28

**ตัวอย่างที่ 11** จงหาค่าอิมพีแดนซ์และค่าแอดมิตแตนซ์ของตัวเหนี่ยวนำ  $L = 10 \text{ mH}$

เมื่อความถี่เป็น  $\omega = 1 \text{ krad/s}$

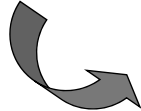
**วิธีทำ**

อิมพีแดนซ์



$$Z = j\omega L = j(1\text{k})(10\text{m}) = j10 = 10\angle 90^\circ \Omega$$

แอดมิตแตนซ์



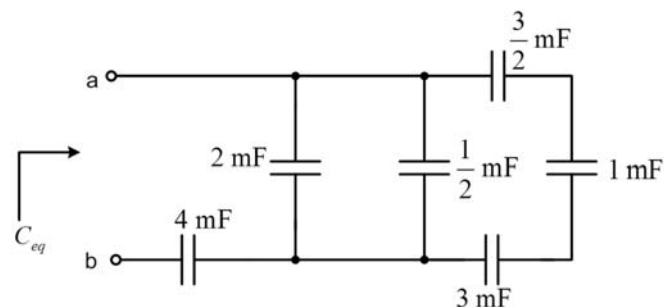
$$Y = \frac{1}{Z}$$

$$= \frac{1}{10\angle 90} = 0.1\angle -90^\circ \text{ S}$$

29

**ตัวอย่างที่ 12** จงหาค่าอิมพีแดนซ์และค่าแอดมิตแตนซ์

ของตัวเก็บประจุสมมูลด้านซ้ายมือของขั้ว  $a-b$  เมื่อความถี่เป็น  $\omega = 1 \text{ krad/s}$



**วิธีทำ** กำหนดให้หน่วยเป็น mF

ค่าตัวเก็บประจุต่ออนุกรม  $\Rightarrow \frac{1}{C_1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \text{ mF}$

ค่าตัวเก็บประจุต่อขนานกัน  $\Rightarrow C_2 = 2 + 0.5 + C_1 = 3$

ค่าตัวเก็บประจุต่ออนุกรม  $\Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{C_2} = \frac{7}{12}$

ค่าตัวเก็บประจุสมมูล  $\Rightarrow C_{eq} = \frac{12}{7} \text{ mF}$

30

ค่าอิมพีแดนซ์


$$Z = \frac{1}{j\omega C_{eq}} = \frac{1}{j(1k)\left(\frac{12}{7}m\right)}$$
$$= \frac{7}{12} \angle -90^\circ = -j0.583 \Omega$$

ค่าแอดมิตแตนซ์


$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{-0.583j} = 1.71j \text{ S}$$

31

## บทสรุปสัปดาห์ที่ 1

### การวิเคราะห์สัญญาณไซน์ที่สภาวะคงตัว

- สัญญาณไซน์เป็นคลื่นรูปไซน์และคลื่นรูปโคไซน์
- ใช้เฟสเซอร์ในการวิเคราะห์วงจร
- แปลงวงจรจากโดเมนเวลาให้เป็นโดเมนความถี่
- อุปกรณ์แบบพาสซีฟเปลี่ยนเป็นอิมพีแดนซ์และแอดมิตแตนซ์
- สมการเป็นพีชคณิต
- วิเคราะห์วงจรโดยใช้กฎของโอห์ม กฎของเคอร์ชอฟฟ์

32