

สัปดาห์ที่ 3

กำลังไฟฟ้าที่สภาวะคงตัวของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

AC Steady-State Power

(Part I)

1

จุดประสงค์การเรียนรู้

- ☐ สามารถหาค่ากำลังไฟฟ้าที่เวลาใดๆของสัญญาณใดๆได้
- ☐ สามารถหาค่ากำลังไฟฟ้าที่เวลาใดๆของสัญญาณไซน์ได้
- ☐ สามารถหาค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยของสัญญาณใดๆได้
- ☐ สามารถหาค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยของสัญญาณไซน์ได้
- ☐ สามารถหาค่าประสิทธิภาพของสัญญาณรายคาบได้
- ☐ สามารถหาค่าประสิทธิภาพของสัญญาณกระแสสลับได้

2

เนื้อหา

- กำลังไฟฟ้าขณะหนึ่ง
- กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย
- ค่าประสิทธิภาพ
- บทสรุป

3

กำลังไฟฟ้าขณะหนึ่ง

วงจรที่ประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันและอุปกรณ์แบบพาสซีฟ

กำลังไฟฟ้าขณะหนึ่งของสัญญาณใดๆ

กำหนดให้

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t + \phi_v) \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

สูตรตรีโกณ

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i)$$
$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A + B) + \frac{1}{2} \cos(A - B)$$
$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi_v - \phi_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)$$

กำลังไฟฟ้าขณะหนึ่ง
วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

4

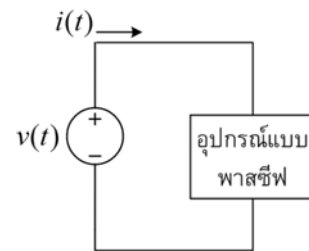
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $v(t) = 10\cos(\omega t + 45^\circ)$ V และ $R = 2\ \Omega$
 จงหา $i(t)$ $p(t)$ และวาดกราฟความสัมพันธ์ของ $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$

วิธีทำ แรงดันเฟสเซอร์ $V = 10\angle 45^\circ$

กระแสเฟสเซอร์ $I = \frac{V}{Z} = \frac{10\angle 45^\circ}{2} = 5\angle 45^\circ$

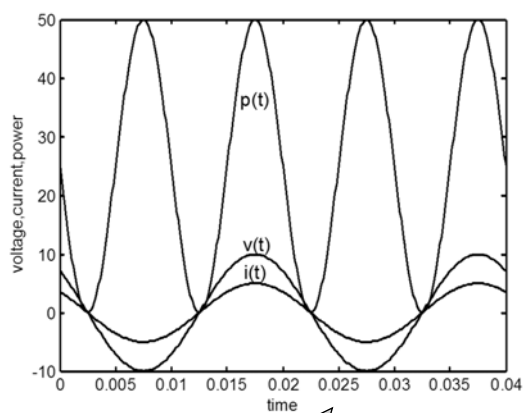
กระแสที่แปรตามเวลา $i(t) = 5\cos(\omega t + 45^\circ)$

กำลังไฟฟ้าขณะหนึ่ง $p(t) = \frac{10 \times 5}{2} [\cos(45^\circ - 45^\circ) + \cos(2\omega t + 45^\circ + 45^\circ)]$
 $= 25[\cos(0^\circ) + \cos(2\omega t + 90^\circ)]$
 $= 25 + 25\cos(2\omega t + 90^\circ)$ W

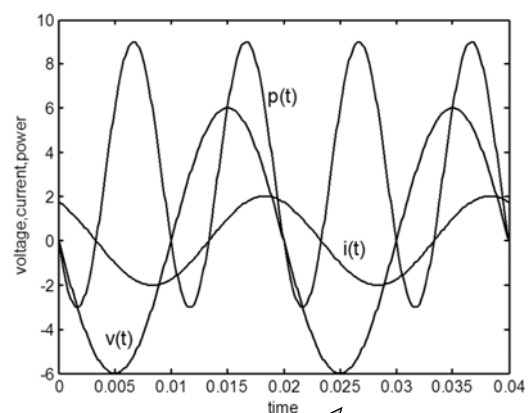


5

กราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงดัน กระแสและกำลังไฟฟ้าขณะหนึ่ง



ตัวอย่างที่ 1



ตัวอย่างที่ 2

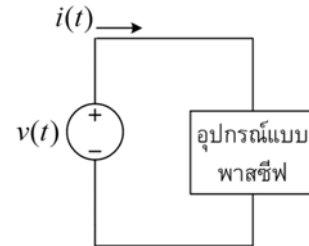
6

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $v(t) = 6 \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$ และ $Z = 3 \angle 60^\circ$
 จงหา $i(t)$ $p(t)$ และวาดกราฟความสัมพันธ์ของ $v(t)$, $i(t)$, $p(t)$

วิธีทำ แรงดันเฟสเซอร์ $V = 6 \angle 90^\circ$

$$\text{กระแสเฟสเซอร์ } I = \frac{V}{Z} = \frac{6 \angle 90^\circ}{3 \angle 60^\circ} = 2 \angle 30^\circ$$

กระแสที่แปรตามเวลา $i(t) = 2 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$



$$\begin{aligned} \text{กำลังไฟฟ้าขณะหนึ่ง } p(t) &= \frac{6 \times 2}{2} [\cos(90^\circ - 30^\circ) + \cos(2\omega t + 90^\circ + 30^\circ)] \\ &= 6 [\cos(60^\circ) + \cos(2\omega t + 120^\circ)] \text{ W} \\ &= 3 + 6 \cos(2\omega t + 120^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

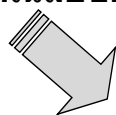
7

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย (Average Power) หรือกำลังไฟฟ้าจริง (Real power) หรือกำลังไฟฟ้าแบบแอคทีฟ (Active power)

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยของสัญญาณรายคาบ $\Rightarrow P_{ave} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$

สัญญาณไซน์ $\left\{ \begin{array}{l} v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \end{array} \right.$

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยของสัญญาณไซน์



$$\begin{aligned} P_{ave} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{V_m I_m}{2} \cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) \right] dt \\ P_{ave} &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) \end{aligned}$$

8

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยของตัวต้านทาน

$$P_{ave} = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \quad \text{เมื่อ } \phi_v - \phi_i = 0 \quad \text{และ } \cos 0^\circ = 1$$

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยของตัวเหนี่ยวนำ

$$P_{ave} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(90^\circ) = 0$$

$$\text{เมื่อ } \phi_v - \phi_i = 90^\circ \quad \text{และ } \cos(90^\circ) = 0$$

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยตัวเก็บประจุ

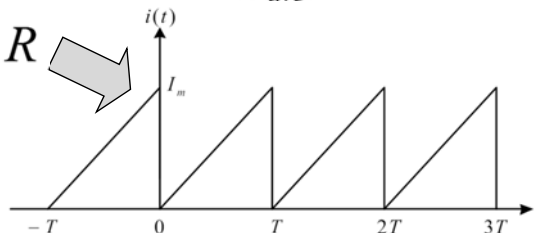
$$P_{ave} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(-90^\circ) = 0$$

$$\text{เมื่อ } \phi_v - \phi_i = -90^\circ \quad \text{และ } \cos(-90^\circ) = 0$$

9

ตัวอย่างที่ 3 จงหากำลังไฟฟ้าเฉลี่ย P_{ave} ที่ตัวต้านทาน R ทั่วไป

เมื่อกระแสที่ไหลผ่าน R



วิธีทำ

$$\text{สมการกระแส} \quad i = \frac{I_m}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\text{สมการกำลังไฟฟ้าขณะหนึ่ง} \quad p(t) = v(t)i(t) = i^2 R = R \frac{I_m^2}{T^2} t^2, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\text{สมการกำลังไฟฟ้าเฉลี่ย} \quad P_{ave} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R t^2}{T^2} dt = \frac{I_m^2 R}{T^3} \int_0^T t^2 dt = \frac{I_m^2 R T^3}{3 T^3}$$

$$P_{ave} = \frac{I_m^2 R}{3} \text{ W}$$

10

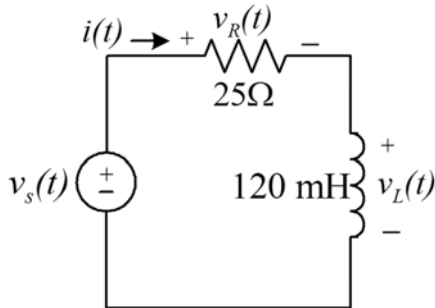
ตัวอย่างที่ 4 จงหากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยของอุปกรณ์แต่ละตัวในวงจร

กำหนดกระแส $i(t) = 721\cos(100t - 41^\circ)$ mA

และแรงดันที่ตกคร่อมแต่ละตัวเป็น $v_s(t) = 20\cos(100t - 15^\circ)$

$$v_R(t) = 18\cos(100t - 41^\circ)$$

$$v_L(t) = 8.66\cos(100t + 49^\circ)$$



วิธีทำ

$$P_s = \frac{20 \times 0.721}{2} \cos(-15^\circ - (-41^\circ)) = 6.5 \text{ W}$$

$$P_R = \frac{1}{2} \times 18 \times 0.721 \cos(-41^\circ - (-41^\circ)) = 6.5 \text{ W}$$

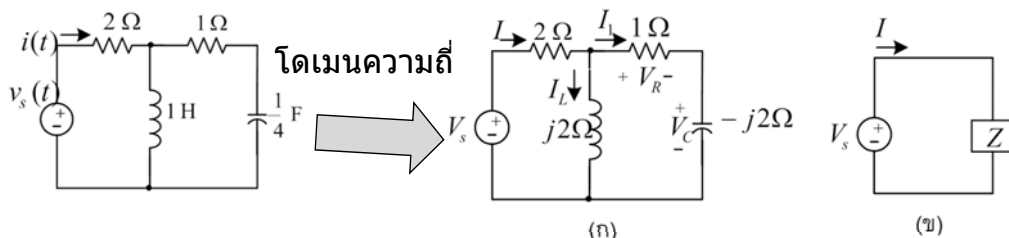
$$P_L = \frac{1}{2} \times 8.66 \times 0.721 \cos(49^\circ - (-41^\circ)) = 0 \text{ W}$$

11

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้แหล่งจ่ายแรงดัน $v_s(t) = 4\cos 2t$ V

(ก) จงวาดวงจรเป็นโดเมนความถี่

(ข) จงหากำลังที่สูญเสียของอุปกรณ์แต่ละตัว



ค่าอิมพีแดนซ์รวม $Z = 2 + (j2 \times (1 - j2)) = 2 + j2 - j^2 4 = 6 + j2 \Omega$

กระแสที่ไหลในวงจร $I = \frac{V}{Z} = \frac{4\angle 0^\circ}{6.32\angle 18.4^\circ} = 0.63\angle -18.4^\circ \text{ A}$

12

การแบ่งกระแสเพื่อหาค่ากระแส I_1

$$I_1 = \frac{j2}{j2+1-j2} \times 0.63 \angle -18.4^\circ$$

$$= 2 \angle 90^\circ \times 0.63 \angle -18.4^\circ$$

$$= 1.26 \angle 71.6^\circ$$

$$V_R = I_1 R = 1.26 \angle 71.6^\circ$$

$$V_C = I_1 Z_C = (-j2) \times 1.26 \angle 71.6^\circ = 2 \angle -90^\circ \times 1.26 \angle 71.6^\circ$$

$$= 2.52 \angle -18.4^\circ$$

กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 2 H

$$I_L = I - I_1 = 0.63 \angle -18.4^\circ - (1.26 \angle 71.6^\circ)$$

$$= (0.6 - j0.2) - (0.4 + j1.2)$$

$$= 0.2 - j1.4 = 1.41 \angle -81^\circ$$

แรงดันที่ตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ 2 H

$$V_L = Z_L I_L$$

$$= j2 \times 1.41 \angle -81^\circ = 2 \angle 90^\circ 1.41 \angle -81^\circ$$

$$= 2.82 \angle 9^\circ$$

13

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่ตัวต้านทานได้รับ

$$R = 1 \Omega \Rightarrow P_{R1\Omega} = \frac{1}{2} I_1^2 R = \frac{1}{2} (1.26)^2 \times 1 = 0.7938 \text{ W}$$

$$R = 2 \Omega \Rightarrow P_{R2\Omega} = \frac{1}{2} I^2 R = \frac{1}{2} (0.63)^2 \times 2 = 0.3969 \text{ W}$$

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่ตัวเก็บประจุ $\frac{1}{4} \text{ F}$

$$P_C = \frac{1}{2} I_1 V_C \cos(\phi_{V_C} - \phi_{I_1})$$

$$= \frac{1}{2} \times 2.52 \times 1.26 \cos(-18.4^\circ - (71.6^\circ))$$

$$= 0 \text{ W}$$

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่ตัวเหนี่ยวนำ 1 H

$$P_L = \frac{1}{2} \times I_L \times V_L \cos(\phi_{V_L} - \phi_{I_L})$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.41 \times 2.82 \cos(9^\circ - (-81^\circ))$$

$$= 0 \text{ W}$$

14

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่แหล่งจ่าย

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{2} I \times V_s \cos(\phi_{V_s} - \phi_I) \\ &= \frac{1}{2} \times 0.63 \times 4 \cos(0^\circ - (-18.4^\circ)) \\ &= 1.19 \text{ W} \end{aligned}$$

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยรวม

$$\begin{aligned} -P_s + P_{R1\Omega} + P_L + P_{R2\Omega} + P_C &= 0 \\ P_s &= P_{R1\Omega} + P_{R2\Omega} + P_C + P_L \\ 1.19 &= 0.7938 + 0.3969 + 0 + 0 \\ 1.19 &= 1.19 \end{aligned}$$

15

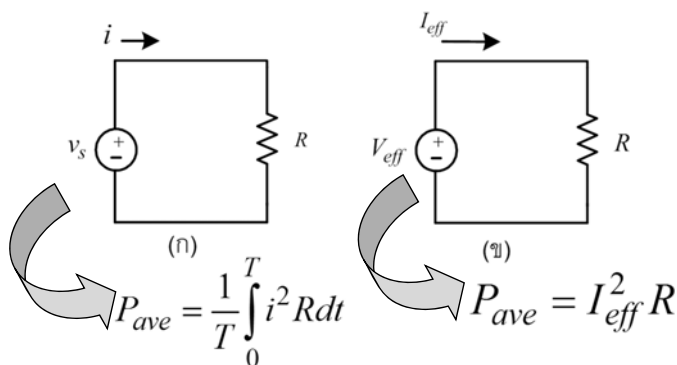
ค่าประสิทธิผล (Effective Value)

หรืออาร์เอ็มเอส (RMS Value) หรือ root mean square value

➤ ผลที่ทำให้เกิดการสูญเสียกำลังไฟฟ้าในตัวต้านทานของสัญญาณใดๆ

➤ หาได้จากการวัดค่าของกระแสหรือแรงดัน

ที่ทำให้เกิดการสูญเสียกำลังไฟฟ้าในตัวต้านทานของสัญญาณนั้นๆ
เทียบกับกำลังไฟฟ้าที่สูญเสียในตัวต้านทานที่เป็นกระแสตรง



$$I_{eff}^2 R = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = I_{rms}$$

ค่าประสิทธิผลของสัญญาณรายคาบ

16

การหาค่าอาร์เอ็มเอสที่แหล่งจ่ายเป็นสัญญาณไซน์ $i(t) = I_m \cos \omega t$

หาค่าอาร์เอ็มเอส
$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (I_m \cos \omega t)^2 dt}$$

สูตรตรีโกณ $\cos^2 \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\beta$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) dt}$$

ในการอินทิเกรตรูปคลื่นโคไซน์
มีค่าเป็นศูนย์

$$= I_m \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} [1 + \cos 2\omega t] dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$I_{rms} = I_m \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1}{2} dt \right)^{\frac{1}{2}} = I_m \left(\frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ค่าอาร์เอ็มเอสของสัญญาณไซน์
(กระแส)

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

17

ค่าอาร์เอ็มเอสของสัญญาณรายคาบที่เป็นแรงดัน

$$V_{rms} = V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

ค่าอาร์เอ็มเอสของสัญญาณแรงดันเป็นรูปคลื่นโคไซน์ $v(t) = V_m \cos \omega t$

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

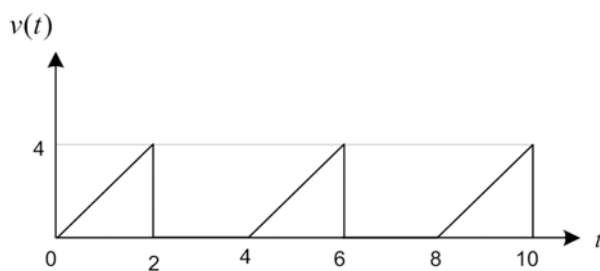
สัญญาณไซน์ n สัญญาณ ที่เป็นกระแสไหลผ่านตัวต้านทาน R

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย $\Rightarrow P = (I_{eff1}^2 + I_{eff2}^2 + \dots + I_{effn}^2) R$

ค่าประสิทธิผล $\Rightarrow I_{eff} = \sqrt{I_{eff1}^2 + I_{eff2}^2 + \dots + I_{effn}^2}$

18

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าแรงดันอาร์เอ็มเอสเมื่อคาบเวลาเป็น 4 วินาที $T = 4$



วิธีทำ

ค่าแรงดันอาร์เอ็มเอส

สมการ

$$v = 2t, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$= 0, \quad 2 \leq t \leq 4$$

$$\begin{aligned} V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \int_0^2 (2t)^2 dt + \int_2^4 0 dt} \\ &= \left(\frac{1}{4} \frac{4t^3}{3} \bigg|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2^3}{3} - 0} \\ &= 1.63 \end{aligned}$$

19

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าประสิทธิภาพของกระแส

(ก) $i(t) = \cos 3t + \cos 3t$ (ข) $i(t) = \sin 3t + \cos(3t + 60^\circ)$

(ค) $i(t) = 2 \cos 3t + 3 \cos 5t$

วิธีทำ (ก) $\omega = 3 \text{ rad/s}$

$$\begin{aligned} i(t) &= \cos 3t + \cos 3t \\ &= 2 \cos 3t \end{aligned} \Rightarrow I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(ข) $\omega = 3 \text{ rad/s}$

$$i(t) = \sin 3t + \cos(3t + 60^\circ) = \cos(3t - 90^\circ) + \cos(3t + 60^\circ)$$

เฟสเซอร์ของกระแส

$$I = 1 \angle -90^\circ + 1 \angle 60^\circ = -j + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.518 \angle -15^\circ$$

หาค่าประสิทธิภาพของกระแส

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{0.518}{\sqrt{2}} = 0.37$$

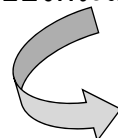
20

(ค) กระแส $i(t) = 2\cos 3t + 3\cos 5t$

$\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ และ $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$

$$I_{eff}^2 = \left(\frac{I_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + 4.5 = 6.5$$

ค่าประสิทธิภาพของกระแส


$$I_{eff} = \sqrt{6.5} = 2.55 \text{ A}$$

21

บทสรุปสัปดาห์ที่ 3 กำลังไฟฟ้าที่สภาวะคงตัวของไฟฟ้ากระแสสลับ

- การวิเคราะห์หาค่ากำลังไฟฟ้าต่างๆของสัญญาณใด
 - กำลังไฟฟ้าขณะหนึ่งหรือกำลังไฟฟ้าที่เวลาใดๆ
 - กำลังไฟฟ้าจริงหรือกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยหรือกำลังไฟฟ้าแบบแอดทีฟ
- หาความสัมพันธ์ของแรงดันอาร์เอ็มเอสกับแรงดันค่ายอดของสัญญาณรายคาบใดๆและสัญญาณกระแสสลับ

22